

海 军 工 程 大 学

2027 年硕士研究生招生考试自命题科目考试大纲

科目代码：805 科目名称：数学综合

一、考试要求

主要考查学生对高等数学、线性代数、概率论与数理统计基本概念、基本定理、基本计算的理解与掌握，以及运用数学基本思维和论证方法分析和解决工程应用问题的能力。

二、考试内容

1. 函数、极限、连续

(1) 函数：函数的定义、基本特性，基本初等函数的性质与图形，反函数、复合函数、初等函数及分段函数等概念。

(2) 极限：数列极限、函数极限的概念，极限的唯一性、有界性、保号性定理及极限存在的充要条件；无穷小的性质，无穷小与无穷大的关系，无穷小与函数极限的关系；极限计算的各种方法，两个重要极限及其应用。

(3) 连续：函数连续性的概念，间断点的类型，闭区间上连续函数的最值定理、介值定理及零点定理。

2. 微分学

(1) 导数及微分：导数的概念、及基本初等函数的导数公式；导数的四则运算法则，复合函数、反函数、隐函数及参数方程求导方法，对数求导法；函数微分的概念、微分运算；高阶导数的概念和计算方法。

(2) 中值定理：罗尔定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理，及定理的一些简单推论。

(3) 导数的应用：洛必达法则、函数的泰勒公式、函数单调性的判定法、曲线的凹凸性与拐点的判定法；一元函数求极值的方法，求解最值问题；弧微分的概念与弧长计算。

(4) 多元函数极限的计算方法；偏导数的概念与计算；多元复合函数求偏导数的链式法则，一个方程或方程组确定的隐函数求导问题；全微分的概念及计算。

(5) 多元函数微分的应用：求空间曲线的切线与法平面方程、曲面的切平面与法线方程；方向导数与梯度的概念与计算，二元函数极值及最值的求法。

3. 积分学

(1) 不定积分：不定积分的概念、基本性质及基本积分公式；不定积分的换元法和分部积分法；有理函数、三角有理式及简单无理函数的积分方法。

(2) 定积分：定积分的概念和基本性质，积分中值定理及其应用，积分上限函数及其性质；牛顿-莱布尼兹公式，定积分的换元法与分部积分法，反常积分的概念及计算方法。

(3) 定积分的应用：定积分元素法在平面图形面积、旋转体及平行截面积已知的立体的体积、平面曲线弧长计算中的应用。

(4) 重积分：二重积分、三重积分的概念、性质及计算方法；重积分元素法在几何、物理上的应用，如曲面的面积，立体体积，平面薄片或立体的质心、转动惯量。

(5) 曲线积分：两类曲线积分的概念、性质、计算方法及它们之间的关系；格林公式、平面曲

线积分与路径无关的充要条件。

(6) 曲面积分: 两类曲面积分的概念、性质、计算方法及它们之间的关系; 高斯公式及其应用。

4. 向量代数、空间解析几何

(1) 向量代数: 向量的方向角和方向余弦的概念; 向量的数量积、向量积、混合积的定义、运算性质及利用坐标进行计算; 两向量的夹角的计算公式。

(2) 曲面: 曲面方程的概念, 常见的二次曲面的方程及其图形; 母线平行于坐标轴的柱面方程, 以坐标轴为旋转轴的旋转面的方程。

(3) 曲线: 空间曲线方程的概念, 空间曲线关于坐标面的投影柱面及空间曲线在坐标面上的投影曲线。

(4) 平面、直线: 平面的点法式、一般式方程及其求法; 直线的一般式、对称式及参数方程及其求法; 平面与平面、平面与直线的夹角。

5. 无穷级数

(1) 常数项级数: 无穷级数的收敛、发散及和的概念, 无穷级数的运算性质; 正项级数的比较审敛法、比值审敛法及根值审敛法; 交错级数的莱布尼兹审敛法; 绝对收敛与条件收敛的概念。

(2) 幂级数: 幂级数收敛半径、收敛区间的求法, 幂级数在其收敛区间内的连续性、逐项可微性、逐项可积性及其应用, 简单幂级数的和函数的计算方法。

(3) Fourier 级数: 三角函数系的正交性; Dirichlet 收敛定理; 以 2π 为周期的函数的 Fourier 级数展开。

6. 线性代数

(1) 行列式与矩阵: n 阶行列式的定义和性质, 常见类型的行列式计算方法, 克拉默法则; 矩阵常见运算及性质; 逆矩阵的概念、性质以及计算方法; 矩阵秩的概念及其计算方法。

(2) 线性方程组: 向量组线性相关、线性无关的概念及判别法; 向量组极大线性无关组及秩的概念及求法; 向量空间、子空间、基、维数、坐标等概念; 线性方程组解的结构, 齐次线性方程组和非齐次线性方程组通解的求解方法。

(3) 方阵的对角化与二次型: 矩阵的特征值和特征向量的概念、性质及计算; 相似矩阵的概念和性质, 矩阵相似对角化的条件; 实对称矩阵的正交相似对角化; 化二次型为标准形; 正定矩阵的概念及判别法。

7. 概率论

(1) 随机事件及其概率: 随机事件的关系与运算; 古典概型和几何概型的概率计算; 条件概率、乘法定理、全概率公式与贝叶斯公式的概念及计算; 事件独立性概念、性质与计算。

(2) 随机变量及其概率分布: 离散型随机变量及其分布律、连续型随机变量及其概率密度函数的概念; 分布函数的概念与性质; 0-1 分布、二项分布和泊松分布相应事件概率的计算; 均匀分布、指数分布和正态分布相应事件概率的计算; 一维随机变量函数的概率分布的计算。

(3) 多维随机变量及其分布: 二维随机变量的分布函数的概念及性质; 离散型随机变量的分布律和边缘分布律的概念及计算; 连续型随机变量的概率密度和边缘密度的概念及计算; 随机变量的独立性概念及条件; 两个独立随机变量和的分布、多个独立随机变量最大值和最小值的分布的求解。

(4) 随机变量的数字特征: 数学期望与方差的概念、性质及计算; 几种常见分布的数学期望与方差; 矩、协方差与相关系数的概念、性质及计算。

8. 数理统计

(1) 抽样分布: 统计量、样本均值、样本方差、样本原点矩、样本中心矩的概念及计算; χ^2 分布、 t 分布、 F 分布、分位数的概念; 正态总体的样本均值和样本方差的分布。

(2) 参数估计: 参数的矩估计法和极大似然估计法; 估计量的无偏性和有效性的概念及估计量无偏性的验证; 区间估计的概念, 单个正态总体均值与方差的置信区间的计算。

(3) 假设检验: 假设检验的统计思想、基本步骤、两类错误; 单个正态总体均值与方差的假设检验。

三、考试形式

考试形式为闭卷、笔试, 考试时间为 3 小时, 满分 150 分。

题型包括: 选择题 20 分、填空题 20 分、计算题或证明题 110 分。

四、参考书目

《高等数学(第八版)》. 同济大学数学科学学院主编. 高等教育出版社, 2023 年, 第八版。

《工程数学(第三版)》. 戴明强、刘海涛、艾小川主编. 科学出版社, 2023 年, 第三版。

全国硕士研究生招生考试海军工程大学
数学综合 样卷

(科目代码 805)

注意事项:

1. 本试卷共 2 页, 满分 150 分; 考试时间 180 分钟。
2. 所有试题都作答在答题纸(卡)上, 答在试卷上无效。
3. 考试结束后, 考生将答题纸(卡)和本试卷一同装入试卷袋后密封, 并在密封签上签名。

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的, 请将其代码填写在答题纸上对应题号内。错选、多选或未选均无分。

1. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 几个数的大小顺序为()。

- A. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$; B. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$;
C. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$; D. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

2. 某人投篮, 每次的命中概率为 0.7, 现投篮 3 次, 则至少命中一次的概率为()。

- A. 0.7; B. 0.063; C. 0.973; D. 0.189

3. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于()。

- A. 1; B. $\frac{3}{2}$; C. $\frac{1}{2}$; D. 2.

4. 若方阵 A 经过有限次初等列变换变为方阵 B , 则下列说法中错误的是()。

- A. 若矩阵 A 的行列式为零, 则矩阵 B 的行列式为零;
B. 矩阵 A 的秩与矩阵 B 的秩相等;
C. 矩阵 A 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价;
D. 方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 与 $B\vec{x} = \vec{0}$ 同解。

5. 设 $y_1 = x$, $y_2 = x + e^{2x}$, $y_3 = x(1 + e^{2x})$ 是常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = f(x)$ 的三个特解, C_1, C_2 是任意常数, 则此微分方程的通解为()。

- A. $y = C_1x + C_2(x + e^{2x}) + (x + e^{2x})$; B. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$;
C. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + x$; D. $y = C_1x + C_2(x + e^{2x})$.

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

每小题解答请在答卷纸上标上题号, 将答案写在题号之后。

6. 累次积分 $\int_0^3 dx \int_x^3 e^{-y^2} dy =$ _____.

7. 函数 $u = xy^2 - y + z$ 在点 $P(1,1,0)$ 处方向导数的最大值为 _____.

8. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, 则 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS =$ _____.

9. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, $X_1, X_2, \dots, X_{25}$ 是来自总体 X 的样本, 随机变量 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{25}^2$, 则 $E(Y) =$ _____.

10. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-2$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域

为_____.

三、(本大题 10 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

四、(本大题 10 分) 设随机向量 $(X, Y) \sim f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 求:

(1) 关于 X 的边缘概率密度; (2) $P\{X > 1 - Y\}$.

五、(本大题 10 分) 设总体 X 的分布律为 $P\{X = x\} = (1 - p)^{x-1} p$, $x = 1, 2, \dots$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 试求参数 p 的矩估计量与极大似然估计量.

六、(本大题 10 分) 设 $f(x) = \arctan x$, (1) 证明它满足方程 $(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0$; (2) 求 $f^{(n)}(0)$.

七、(本大题 12 分) 已知 $f(x)$ 连续, $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 函数 $F(t) = \iiint_{\Omega} [z + f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})] dV$, 其中 Ω 为 $0 \leq z \leq \sqrt{t^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 的公共区域, 求 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^4}$.

八、(本大题 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有定义, $f''(0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

九、(本大题 12 分) 平面 $x + y + z = 1$ 截抛物面 $z = x^2 + y^2$ 得一椭圆, 试求该椭圆到坐标原点的最长距离和最短距离.

十、(本大题 14 分) 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (x^3 + z^2) dydz + (y^3 + x^2) dzdx + (z^3 + y^2) dxdy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

十一、(本大题 14 分) 当 a, b 取何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$
 有无穷多解? 求出解的一般形式.

十二、(本大题 6 分) 设曲线 L 是正向圆周 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$, $\varphi(x)$ 是连续函数且 $\varphi(x) > 0$, 证明: $\oint_L \frac{x}{\varphi(y)} dy - y\varphi(x) dx \geq 2\pi$.